

# Kalkül des natürlichen Schließens

## Korrektheit und Vollständigkeit

Simon Rieß  
Pro-Seminar Perlen 3 bei Prof. Dr. Tobias Nipkow

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
1.1	Regeln . . . . .	2
1.2	Begriffe und Symbole . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Korrektheit</b>	<b>2</b>
2.1	Induktionsannahme . . . . .	2
2.2	Induktionsanfang: ein einzeliger Beweis ( $k=1$ ) . . . . .	3
2.3	Induktionsschritt . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Vollständigkeit</b>	<b>4</b>
3.1	Schritt 1 . . . . .	5
3.2	Schritt 2 . . . . .	5
3.3	Schritt 3 . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Motivation zur Entwicklung des Kalküls</b>	<b>8</b>

# 1 Einführung

Das Kalkül des natürlichen Schließens gibt uns eine Reihe von Regeln an die Hand, mit denen sich überprüfen lässt, ob eine logische Inferenz korrekt ist oder eben nicht. Mit ihnen lassen sich Prämissen und Folgerungen umformen, bis sich deren Korrektheit eindeutig beweisen oder widerlegen lässt.

## 1.1 Regeln

Dieses System kommt mit einer überschaubaren Menge an Regeln aus. Das sind zunächst jeweils zwei Regeln zur Einführung und Auflösung von Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Negation und zwei Weitere zur Auflösung von Kontradiktion und doppelter Negation. Aus diesen zehn grundlegenden Gesetzen lassen sich 4 weitere Regeln ableiten. Der Modus Tollens, die Einführung der doppelten Negation, die Reductio ad Absurdum (RAA) und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten (LEM, vgl. Englisch: law of excluded middle) erleichtern zusätzlich den Umgang mit Umformungen, sind an sich jedoch nur Anwendungen der grundlegenden Regeln.

## 1.2 Begriffe und Symbole

Mit Hilfe dieser Regeln lassen sich nun Sequenzen der Form  $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n \vdash \psi$  verifizieren, was bedeutet, dass sich der Rückschluss  $\psi$  aus den Annahmen  $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n$  folgern lässt. Das heißt, es gibt eine Folge von Anwendungen der Beweisregeln, die die Formel  $\psi$  zeigt.

Eine weitere Beziehung  $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n \models \psi$  stellt dar, dass die Implikation  $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \psi$  eine Tautologie darstellt und somit unter stämlichen Belegungen der weiteren freien Variablen zu T auswertet.

Die Aufgabe dieser Regeln ist es nun, die Beziehung von Schlussfolgerung und Prämissen in Hinblick auf die Wahrheitstabelle der Implikation nicht zu verändern. So darf  $\psi$  beispielsweise nicht zu falsch auswerten, wenn die Prämissen für eine bestimmte Belegung korrekt sind.

# 2 Korrektheit

Sind all diese Regeln nun korrekt, in dem Sinne, dass sich nur korrekte Beweise folgern lassen? Ein korrekter Schluss, also ein Beweis mittels der Umformungsregeln, muss die Implikation  $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \psi$  zu einer Tautologie machen.

Dafür müssen wir Folgendes zeigen:  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi) \rightarrow (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi)$ . Wenn es einen Beweis für  $\psi$  mit Hilfe der Beweisregeln gibt, so lässt sich  $\psi$  aus den Annahmen folgern.

## 2.1 Induktionsannahme

Wir wissen, dass  $\psi$  wegen  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$  aus den Prämissen folgt und somit ein Beweis möglich ist. Nun benutzen wir die Induktion über die Länge dieses Beweises. Diese Länge  $k$  ist schlicht und einfach die Anzahl an Zeilen, also an Umformungen, die es benötigt, um die Korrektheit zu zeigen.

Die Induktionsannahme lautet somit wie folgt: *Für alle Folgen  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$  ( $n \geq 0$ ), die einen Beweis der Länge  $k$  haben, gilt  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$ .* [1]

## 2.2 Induktionsanfang: ein einzeiliger Beweis (k=1)

Hat der Beweis die Länge 1, so muss er folgender Gestalt sein

1  $\phi$  Annahme

da alle anderen Regeln mehr als eine einzelne Zeile benötigen. Dies gilt, wenn  $n = 1$  und sich  $\phi_1$  und  $\phi \psi$  gleichen, die Inferenz also so aussieht:  $\phi \vdash \phi$

Offensichtlich wird  $\phi$  zu true, wenn  $\phi$  zu true ausgewertet. Somit gilt  $\phi \models \phi$  [1]

## 2.3 Induktionsschritt

Nehmen wir an, dass der Beweis für  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$  die Länge  $k$  hat und die Aussage, die wir zeigen wollen, für jede Zahl kleiner als  $k$  stimmt. Somit hat der Beweis folgende Struktur:

1  $\phi_1$  Annahme  
 2  $\phi_2$  Annahme  
 ...  
 n  $\phi_n$  Annahme  
 ...  
 k  $\psi$  Beweis

Wir wissen weder was zwischen den Punkten passiert, noch welche Regel als letzte angewendet wurde, also wodurch die letzte Zeile bewiesen wird. Die erste Ungewissheit ist zu vernachlässigen, da sie durch das Prinzip der mathematischen Induktion behoben wird. Hinter der zweiten Wissenslücke versteckt sich die Hauptarbeit des Beweises, der eigentliche Induktionsschritt. Da es im Allgemeinen keinen Weg gibt, zu wissen welche Regel als letztes angewandt wurde, müssen sämtliche möglichen Fälle betrachtet werden.

1. Nehmen wir an, die letzte Regel war die Und-Einführung. Dann wissen wir, dass  $\psi$  der Gestalt  $\psi_1 \wedge \psi_2$  ist und der Beweis in Zeile  $k$  sich auch zwei Zeilen weiter oben bezieht. Diese Zeilen haben  $\psi_1$ , bzw.  $\psi_2$  als Folgerungen und wir nennen sie  $k_1$  und  $k_2$ . Da  $k_1$  und  $k_2$  kleiner als  $k$  sind, gibt es Beweise für die Aussagen

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi_1$

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi_2$

mit einer Länge kleiner als  $k$ . Aus der Induktionshypothese können wir nun schließen, dass  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zu T auswerten.  $\psi_1 \wedge \psi_2 = \psi$  wertet somit zu  $T \wedge T = T$  aus, was die Induktionsannahme für die Und-Einführung beweist.

2. Wurde  $\psi$  durch die Oder-Auflösung gezeigt, so wurde bereits vorher eine Formel  $\eta_1 \vee \eta_2$  gezeigt oder angenommen. Daher ergibt sich ein kürzerer Beweis

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \eta_1 \vee \eta_2.$$

Somit wertet  $\eta_1 \vee \eta_2$  nach Induktionsannahme zu T aus, da dieses  $k_1$  kleiner als  $k$  ist. Aus der Wahrheitstabelle von  $\vee$  erkennt man, dass mindestens eine der beiden Formeln  $\eta_1$  und  $\eta_2$  zu T auswerten. Wir nehmen an, dass  $\eta_1$  zu T ausgewertet (der andere Fall ist analog zu zeigen). Bei der Anwendung der Oder-Auflösung mussten wir annehmen, dass  $\eta_1$  und  $\eta_2$  zu T ausgewertet und für jeden der beiden Fälle  $\psi$  zeigen. Im ersten Fall ergibt sich der Beweis

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \eta_1 \vdash \psi,$$

bei dem sämtliche Formeln auf der linken Seite von  $\vdash$  zu T auswerten. Die Anwendung der Induktionshypothese impliziert, dass  $\psi$  ebenfalls zu T ausgewertet.

3. Im weiteren Verlauf dieses Beweisen werden die restlichen Formeln auf analoger Art und Weise angenommen und als korrekt bestätigt. Insgesamt bedeutet dies, dass sich die Regeln des Kalküls des natürlichen Schließens im Vergleich zu den entsprechenden Wahrheitstabellen der Implikation semantisch äquivalent verhalten.

Aus Platzgründen wird auf die Ausführung dieser weiteren Teilbeweise verzichtet. [1]

### 3 Vollständigkeit

Wir haben nun gezeigt, dass jede dieser Umformungsregeln die eigentliche Aussage nicht verändert und sich nur korrekte Inferenzen auch beweisen lassen. Dieser Schritt war noch intuitiv leicht nachvollziehbar und beinahe offensichtlich. Doch um dieses Regelwerk tatsächlich verwenden zu können, muss noch gezeigt werden, dass die oben genannten Regeln ausreichen, um sämtliche korrekten Inferenzen beweisen zu können.

Hierfür müssen wir beweisen, dass immer wenn  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$  stimmt, es auch einen Beweis mit den Regeln des natürlichen Schließens für  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$  gibt. Mathematisch ausgedrückt muss in Verbindung mit der Korrektheit der Regeln gelten:

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi \iff \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$$

Dafür gilt es drei Schritte zu zeigen:

1. Schritt:  $\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\dots (\phi_n \rightarrow \psi) \dots)))$
2. Schritt:  $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\dots (\phi_n \rightarrow \psi) \dots)))$
3. Schritt:  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$  [1]

Der erste und letzte Schritt sind recht intuitiv, der Hauptteil des Beweises liegt in Schritt zwei.

### 3.1 Schritt 1

Eine Tautologie ist eine aussagenlogische Formel  $\phi$ , die für alle möglichen Belegungen der Wahrheitswerte der Variablen zu T auswertet. Dies wird  $\models \phi$  geschrieben.

Angenommen, wir wissen  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$ , müssen wir nun zeigen, dass es sich bei  $\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\dots (\phi_n \rightarrow \psi) \dots)))$  tatsächlich um eine Tautologie handelt. Die zweite Formel ist eine geschachtelte Implikation, die daher nur zu F auswertet, wenn alle  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  zu T und  $\psi$  zu F auswertet. Dies widerspricht jedoch dem Fakt, dass  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$ , somit gilt  $\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\dots (\phi_n \rightarrow \psi) \dots)))$ . [1]

### 3.2 Schritt 2

Dieser Schritt bildet das Kernstück des Beweises und weist den größten Schwierigkeitsgrad der Teilbeweise auf.

Angenommen, es gilt  $\models \eta$  und  $\eta$  besteht aus  $n$  aussagenlogischen Atomen  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , so wissen wir, dass  $\eta$  in allen  $2^n$  Zeilen der Wahrheitstabelle zu T auswertet. Doch wie lässt sich aus diesem Wissen nun ein Beweis für  $\eta$  ableiten? Im konkreten Fall gelingt dies meist durch "scharfes Hinsehen" und die Analyse der Struktur der Formel. Hier suchen wir allerdings eine allgemeine Herangehensweise, um einen Beweis für eine beliebige Tautologie zu finden. Dafür wird jede einzelne Zeile der Wahrheitstabelle von  $\eta$  als Sequenz dargestellt. Diese Sequenzen lassen sich einzeln beweisen und zu einem Beweis für  $\eta$  zusammensetzen.

*Sei  $\phi$  eine Formel, so dass  $p_1, p_2, \dots, p_n$  seine einzigen aussagenlogischen Atome sind. Sei  $l$  nun eine beliebige Zeile in  $\phi$ s Wahrheitstabelle. Für alle  $1 \leq i \leq n$  sei  $\hat{p}_i$  gleich  $p_i$ , wenn der Eintrag in Zeile  $l$  von  $p_i$  T ist, ansonsten ist  $\hat{p}_i$  gleich  $\neg p_i$ . Daraus erhalten wir*

1.  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n \vdash \phi$  lässt sich zeigen, wenn der Eintrag von  $\phi$  in Zeile  $l$  T ist
2.  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg \phi$  lässt sich zeigen, wenn der Eintrag von  $\phi$  in Zeile  $l$  F ist

Beweis: Hierfür wird die strukturelle Induktion auf die Formel  $\phi$ , also auf ihren Syntaxbaum angewendet.

1. Ist  $\phi$  bereits ein aussagenlogisches Atom  $p$ , so muss nur  $p \vdash p$  und  $\neg p \vdash \neg p$  gezeigt werden. Diese Einzeiler sind intuitiv offensichtlich.
2. Ist  $\phi$  der Form  $\neg \phi_1$ , so gibt es zwei Fälle zu betrachten. Zunächst nehmen wir an, dass  $\phi$  zu T und  $\phi_1$  zu F auswertet. Dabei ist zu beachten, dass  $\phi_1$  aus den selben aussagenlogischen Atomen wie  $\phi$  besteht. Wir können die Induktionshypothese auf  $\phi_1$  anwenden, um  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg \phi_1$  zu schließen.  $\neg \phi_1$  ist einfach  $\phi$ , was diesen Schritt abschließt. Falls  $\phi$  zu F auswertet, so wird  $\phi_1$  zu T und wir erhalten  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n \vdash \phi_1$  durch Induktion. Durch Anwendung der Regel zur Einführung der

doppelten Negation ergibt sich  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\neg\phi_1$ .  $\neg\neg\phi_1$  ist wiederum einfach  $\neg\phi$ , was auch diesen Schritt abschließt.

Die weiteren Fälle behandeln zwei Subformeln:  $\phi$  entspricht  $\phi_1 \circ \phi_2$ , wobei  $\circ$  für  $\rightarrow, \vee$  oder  $\wedge$  steht. Für diese Fälle seien nun  $q_1, \dots, q_l$  die aussagenlogischen Atome von  $\phi_1$  und  $r_1, \dots, r_k$  die Atome von  $\phi_2$ . Daraus ergibt sich  $q_1, \dots, q_l \cup r_1, \dots, r_k = p_1, \dots, p_k$ , sodass  $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l \vdash \psi_1$  und  $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_k \vdash \psi_2$  gemeinsam durch die Regel zur Einführung der Konjunktion

$$\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \psi_1 \wedge \psi_2$$

implizieren. Dadurch können wir die Induktionshypothese anwenden und müssen nur zeigen, dass die gefolgerten Konjunktionen uns den Beweis der entsprechenden Folgerung für  $\phi$  oder  $\neg\phi$  erlauben.

3.  $\phi$  sei  $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ . Wenn  $\phi$  zu F ausgewertet, so muss  $\phi_1$  zu T und  $\phi_2$  zu F auswerten. Aus der Induktionshypothese erhalten wir  $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l \vdash \phi_1$  und  $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_k \vdash \neg\phi_2$ , woraus  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \phi_1 \wedge \neg\phi_2$  folgt. Wir müssen  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$  zeigen; unter Verwendung von  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \phi_1 \wedge \neg\phi_2$  läuft sich dies auf die Sequenz

$$\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$$

hinaus, was durch einfaches Umformen gezeigt werden kann. Falls  $\phi$  zu T ausgewertet, so gibt es drei Fälle zu betrachten. Erstens, wenn  $\phi_1$  und  $\phi_2$  zu F auswerten, dann erhalten wir durch die Induktionshypothese, dass  $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l \vdash \neg\phi_1$  und  $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_k \vdash \neg\phi_2$ , sodass  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$  folgt. Wieder reicht es die Sequenz  $\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$  zu zeigen. Zweitens, wenn  $\phi_1$  zu F und  $\phi_2$  zu T auswertet, so folgern wir mit der Induktionshypothese, dass  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \neg\phi_1 \wedge \phi_2$ , was die Sequenz  $\neg\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$  ergibt. Drittens, wenn  $\phi_1$  und  $\phi_2$  zu T auswerten, so zeigt sich  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ , was in der Sequenz  $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$  endet.

4. Ist  $\phi$  von der Gestalt  $\phi_1 \wedge \phi_2$ , so gilt es erneut vier Fälle zu behandeln. Erstens, wenn  $\phi_1$  und  $\phi_2$  beide zu T auswerten, so erhalten wir mit der Induktionshypothese  $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l \vdash \phi_1$  und  $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_k \vdash \phi_2$ , sodass  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$  folgt.  $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$  ist offensichtlich. Zweitens, falls  $\phi_1$  zu F und  $\phi_2$  zu T auswerten, so ergibt sich  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \neg\phi_1 \wedge \phi_2$ . Unter Verwendung der Regel zur Konjunktion-Einführung wie oben gezeigt, so bleibt die Sequenz  $\neg\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$ . Drittens, wenn  $\phi_1$  und  $\phi_2$  beide zu F auswerten, so erhalten wir  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$ , was die Sequenz  $\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$  zu zeigen übrig lässt. Viertens, wenn  $\phi_1$  zu T und  $\phi_2$  zu F auswerten, so ergibt sich  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \phi_1 \wedge \neg\phi_2$  aus der Induktionshypothese und wir müssen die Sequenz  $\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$  zeigen.
5. Abschließend kann  $\phi$  noch die der Form der Disjunktion  $\phi_1 \vee \phi_2$  haben, für die sich wiederum 4 Fälle ergeben. Erstens, wenn  $\phi_1$  und  $\phi_2$  beide zu F auswerten, so ergibt sich durch die Induktionshypothese und die

Regel zur Konjunktions-Einführung  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$ , wofür wir die Sequenz  $\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2)$  zeigen müssen. Zweitens, falls  $\phi_1$  und  $\phi_2$  beide zu T auswerten, so erhalten wir  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ , was sich durch die Sequenz  $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2$ . Drittens, wenn  $\phi_1$  zu F und  $\phi_2$  zu T auswerten, so kommen wir bei  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \neg\phi_1 \wedge \phi_2$  an, was in der Sequenz  $\neg\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2$  endet. Viertens, falls  $\phi_1$  zu T und  $\phi_2$  zu F auswerten, so erhält man  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_l \vdash \phi_1 \wedge \neg\phi_2$  aus der Induktionshypothese und es bleibt nur noch die Sequenz  $\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2$ .

Angewendet auf die Tautologie  $\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\dots(\phi_n \rightarrow \psi)\dots)))$  ergeben sich  $2^n$  Beweise der Form

$$\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n \vdash \eta,$$

für jede Zeile der Wahrheitstabelle. Daraus muss nun noch ein Beweis für  $\eta$  zusammengesetzt werden, welcher keine Annahmen mehr verwendet. Dies geschieht exemplarisch anhand der Tautologie  $p \wedge q \rightarrow p$ . Aus den beiden aussagenlogischen Atomen  $p$  und  $q$  ergeben sich folgende Sequenzen:

$$\begin{aligned} p, q &\vdash p \wedge q \rightarrow p \\ \neg p, q &\vdash p \wedge q \rightarrow p \\ p, \neg q &\vdash p \wedge q \rightarrow p \\ \neg p, \neg q &\vdash p \wedge q \rightarrow p \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf wird die Regel des ausgeschlossenen Dritten angewandt, welche besagt, dass für ein beliebiges  $r$   $r \vee \neg r$  gilt. Anschließend werden die vier Fälle mittels Oder-Einführung angenommen. So können wir alle vier Fälle einbeziehen und nacheinander alle Prämissen auflösen.

1	$p \wedge \neg p$								LEM
2	$p$		Annahme	$\neg p$					Annahme
3	$q \wedge \neg q$		LEM	$q \wedge \neg q$					LEM
4	$q$	Annahme	$\neg q$	Annahme	$q$	Annahme	$\neg q$		Annahme
5	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
6									
7	$p \vee q \rightarrow p$		$p \vee q \rightarrow p$		$p \vee q \rightarrow p$		$p \vee q \rightarrow p$		$p \vee q \rightarrow p$
8	$p \vee q \rightarrow p$			$\wedge e$	$p \vee q \rightarrow p$				$\wedge e$
9	$p \vee q \rightarrow p$								$\wedge e$

Natürlich ist es lächerlich, eine solch kurze Formel mit einem so langen Beweis zu zeigen. Jedoch stellt dies eine uniforme Herangehensweise dar, welche ungeachtet ihrer Komplexität auf jede Tautologie angewendet werden kann. [1]

### 3.3 Schritt 3

Abschließend müssen wir einen Beweis für  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$  finden. Dazu bauen wir auf dem Beweis für  $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\dots(\phi_n \rightarrow \psi)\dots)))$  und erweitern ihn, indem wir  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  als Annahmen hinzufügen. Dafür wenden wir die Regel der Implikations-Auflösung  $n$  mal auf jede dieser Annahmen an

(beginnend mit  $\phi_1$ , weiter mit  $\phi_2$  etc.). Schließlich enden wir bei der Folgerung  $\psi$ , was uns den Beweis für  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$  liefert.

Somit findet jede Tautologie, also jeder gültige Schluss, auch einen entsprechenden Beweis mittels der gegebenen Umformungsregeln. [1]

## 4 Motivation zur Entwicklung des Kalküls

Mit dem Kalkül des natürlichen Schließens lassen sich logische Inferenzen auf ihre Gültigkeit überprüfen. Doch wozu führt man in der Aussagenlogik ein solch mächtiges Regelwerk, wenn deren Überprüfung auch mit Wahrheitstabellen und Umformungen möglich ist?

Zum Einen rührt die “Natürlichkeit” dieses Kalküls von der Intuitivität der Regeln her. Sie sind nahezu offensichtlich und daher leicht zu verstehen. Die Art und Weise mit ihnen zu argumentieren ist sehr nahe an der natürlichen Herangehensweise zum Beweis einer Formel oder Aussage. Zum Anderen explodiert die Anzahl der Einträge in der Wahrheitstabelle mit zunehmender Zahl an Variablen, was die Handhabung dieser Methode enorm verschlechtert.

Spätestens bei der Anwendung in der Prädikatenlogik zeigt sich die Überlegenheit dieses Kalküls. Dafür muss das Regelwerk lediglich um Regeln zur Einführung und Auflösung von Quantoren erweitert werden und es lässt sich in gewohnter Weise ein Beweis für die entsprechende Formel finden. Durch einfache logische Umformungen ist es in der quantisierten Logik hingegen sehr schwer, eine Inferenz zu zeigen.

Letzten Endes motivierte die Natürlichkeit der Beweisführung und ihre leichte Erweiterbarkeit die Entwicklung des Kalküls des natürlichen Schließens.



## Literaturverzeichnis

- [1] Michael Huth and Mark Ryan. *Logic in Computer Science - Modelling and Reasoning about Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.