Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Lars Hupel

WS 2015/16
06.11.2015
Abgabe bis: 13.11.2015

Perlen der Informatik
3. Übung

Aufgabe G3.1 Registermaschinen

Schreiben Sie ein Registermaschinen-Programm, das die auf Blatt 1 beschriebene Decodierungsfunktion für Paare von natürlichen Zahlen implementiert. Die zu decodierende Zahl soll hierbei in Register 0, das Ergebnis der Decodierung (d.h. die erste und zweite Komponente des Paares) in Register 1 und 2 abgelegt werden. Der Inhalt von Register 0 darf während der Berechnung überschrieben werden.

Hinweis: Es ist eventuell einfacher, sich an der rekursiven Charakterisierung der Decodierungsfunktion zu orientieren.

Aufgabe G3.2 Terminierung von Textersetzungssystemen

Ein Textersetzungssystem $\mathcal{R}$ über einem Alphabet Σ ist eine endliche Menge von Regeln der Form $l \to r$, wobei l und r Wörter über Σ sind. Ein solches $\mathcal{R}$ definiert eine Reduktionsrelation $\to_{\mathcal{R}}$ wie folgt: Für zwei Wörter w_1 und w_2 gilt $w_1 \to_{\mathcal{R}} w_2$ genau dann, wenn eine Regel $l \to r \in \mathcal{R}$ existiert, so dass w_1 die Form ulv und w_2 die Form urv für beliebige Wörter u und v hat. Für ein System $\mathcal{R} = \{\mathsf{ab} \to \mathsf{ba}\}$ gelten beispielweise $\mathsf{abab} \to_{\mathcal{R}} \mathsf{abba}$ und $\mathsf{baba} \to_{\mathcal{R}} \mathsf{baab}$.

Wir sagen, ein Textersetzungssystem *terminiert*, wenn es kein Wort mit einer unendlich langen Kette von Reduktionen gibt. So terminiert beispielsweise das System $\{\mathsf{aa} \to \mathsf{a}\}$ (denn das Wort wird mit jedem Schritt kürzer), das System $\{\mathsf{a} \to \mathsf{a}\}$ dagegen terminiert nicht (denn a hat eine unendliche Kette von Reduktionen).

Betrachten Sie die folgenden Systeme. Welche davon terminieren?

1. $\mathcal{R}_1 := \{\mathsf{ab} \to \mathsf{baa}\}$. Wie sieht es mit $\{\mathsf{ab} \to \mathsf{baa}^n\}$ aus?
2. $\mathcal{R}_2 := \{\mathsf{ab} \to \mathsf{bbaa}\}$
3. $\mathcal{R}_3 := \{\mathsf{ab} \to \mathsf{bba}\}$

Aufgabe G3.3 Simulation von Turingmaschinen durch ein Textersetzungssystem

Skizzieren Sie, wie Turingmaschinen durch Textersetzungssysteme simuliert werden können.

Aufgabe H3.1 Challenge

1. Konstruieren Sie eine Turing-Maschine mit Bandalphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und genau 4 Zuständen, die, wenn man sie auf dem leeren Band (nur Nullen) startet, möglichst viele Einsen aufs Band schreibt und dann anhält.

Für die beste (am meisten Einsen produzierende) Maschine, die ich bis zum 12.11. (24 Uhr) per Mail (`hupel@in.tum.de`) zugeschickt bekomme, gibt es eine Tafel Schokolade.

2. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert als $f(n)$ die Anzahl der Einsen ist, die eine haltende Turingmaschine mit n Zuständen und Alphabet Σ höchstens auf das leere Band schreiben kann. Zeigen Sie, dass f nicht berechenbar ist.

Aufgabe H3.2 Simulation von Turingmaschinen durch Registermaschinen

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie Registermaschinen durch Turingmaschinen simuliert werden können. Skizzieren Sie nun, wie Turingmaschinen durch Registermaschinen simuliert werden können.