

Einführung in die theoretische Informatik
Sommersemester 2019 – Übungsblatt 3

AUFGABE 3.1. (*Wichtige Begriffe*)

Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- regulärer Ausdruck
- Produktkonstruktion
- ϵ -NFA
- rekursive Prozedur

AUFGABE 3.2. (*Automata Tutor*)

Stufe B

Hinweis: Die folgenden Aufgaben stehen auch im AutomataTutor zur Verfügung. Zudem finden Sie dort weitere neue Aufgaben. Die Aufgaben finden Sie unter den Kategorien “English to Regular Expression” und “Regular Expression to NFA”. Einige der Aufgaben sind auch bepunktete Hausaufgaben. Beachten Sie, dass der AutomataTutor automatisch $c|\epsilon$ als $c?$ abkürzt.

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen regulären Ausdruck an, der genau die Sprache beschreibt. Verwenden Sie für die ersten drei Aufgaben das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und für die letzten beiden $\Sigma = \{0, 1\}$.

- (a) Wörter gerader Länge.
- (b) Wörter, die mit einem a beginnen und enden, sowie Wörter, die mit einem b beginnen und enden.
- (c) Wörter, in denen kein a neben einem b steht.
- (d) Zahlen in Binärdarstellung (most-significant-bit-first), die durch 2 teilbar sind.
- (e) Zahlen in Binärdarstellung (most-significant-bit-first), die nicht durch 4 teilbar sind.

AUFGABE 3.3.

Stufe B

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck mit möglichst wenigen Zeichen für die Sprache an, in der alle Wörter gleich oft die Zeichenketten **ab** und **ba** enthalten.

Beispiel: Das Wort **abab** enthält zweimal **ab**, aber nur einmal **ba** und soll somit *kein* Element der Sprache sein.

AUFGABE 3.4.

Stufe C

- (a) Geben Sie für jeden Teilausdruck des regulären Ausdrucks $((a\emptyset)^*b \mid ab)^*$ einen ϵ -NFA an. Verwenden Sie hierbei das Verfahren aus der Vorlesung ohne Abänderung, d.h. Sie sollen weder die regulären Ausdrücke noch die Automaten, die Sie konstruieren, vereinfachen.

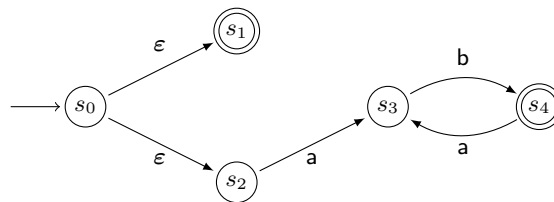
Hinweis: Es gibt 9 Teilausdrücke. Der Ausdruck selbst ist auch ein Teilausdruck.

- (b) Überführen Sie den ϵ -NFA für den gesamten Ausdruck aus Teilaufgabe a) in einen DFA. Kombinieren Sie hierzu die Potenzmengenkonstruktion mit der Umwandlung eines ϵ -NFA in einen NFA. (Vorlesung Folie 58)

AUFGABE 3.5.

Stufe C

Gegeben sei der folgende ϵ -NFA:



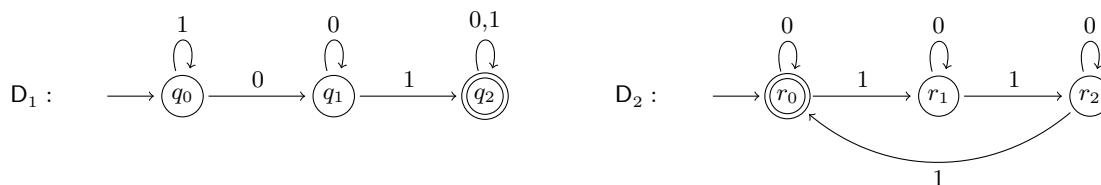
Wandeln Sie den Automat gemäß dem Verfahren aus der Vorlesung in einen äquivalenten regulären Ausdruck um und vereinfachen Sie diesen soweit wie möglich.

Achten Sie hierbei darauf die regulären Ausdrücke die Sie als Zwischenergebnisse erhalten zu vereinfachen.

AUFGABE 3.6.

Stufe C

Gegeben seien zwei DFAs D_1 und D_2 über dem gleichen Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.



- (a) Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung um einen DFA D_{\cap} anzugeben, so dass $L(D_{\cap}) = L(D_1) \cap L(D_2)$.
- (b) Geben Sie einen DFA D_{\cup} an, so dass $L(D_{\cup}) = L(D_1) \cup L(D_2)$. Sie dürfen Ergebnisse aus Teilaufgabe a) verwenden.
- (c) Was müssen Sie ändern, um einen DFA für $L(D_1) \setminus L(D_2)$ anzugeben? Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse für allgemeine binäre Operationen auf Sprachen.

AUFGABE 3.7.

Stufe C

Geben Sie eine rekursive Prozedur $empty(r)$ an, die für einen gegebenen regulären Ausdruck r entscheidet, ob $L(r) = \emptyset$. Für Ihre Definition sollten Sie das folgende Gerüst verwenden:

- $empty(\emptyset) =$
- $empty(a) =$
- $empty(\epsilon) =$
- $empty(\alpha\beta) =$
- $empty(\alpha | \beta) =$
- $empty(\alpha^*) =$

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion, dass Ihre Definition korrekt ist.

Definition (Suffix-Sprache)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über dem Alphabet Σ . Wir definieren $L_{sf} := \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. uv \in L\}$ und bezeichnen L_{sf} als *die Sprache der Suffixe* von L .

AUFGABE 3.8.

Stufe D

Sei $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Wir zeigen nun, dass wenn L regulär ist, dann ist auch L_{sf} regulär.

- (a) Geben Sie die Sprache der Suffixe für $L = \{abc, d\}$ an.
- (b) Sei L regulär. Beweisen Sie, dass auch L_{sf} regulär ist, indem Sie aus einem NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L = L(N)$ einen ϵ -NFA N' mit $L_{sf} = L(N')$ angeben.
- (c) Geben Sie direkt, d.h. ohne den Umweg über NFAs einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L((ab | b)^*cd)_{sf}$ an.
- (d) Beschreiben Sie eine rekursive Prozedur, die einen gegebenen regulären Ausdruck r direkt in einen regulären Ausdruck r' mit $L(r') = L(r)_{sf}$ umschreibt.

AUFGABE 3.9.

Stufe E

Wir betrachten das duale Modell zu NFAs und definieren für diese Aufgabe UFAs (universelle endliche Automaten), die ein Wort w akzeptieren gdw. alle Läufe auf w in einem Endzustand enden. Sei $U = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein UFA. Dann wird das Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann akzeptiert, wenn $\delta(q_0, w) \subseteq F$.

- (a) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage gilt und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen passenden Beweis oder ein passendes Gegenbeispiel angeben:

Jeder UFA ohne Endzustände akzeptiert die leere Sprache.

- (b) Wir betrachten folgende Sprache $L_k = \{w \in \Sigma^* \mid \forall 1 \leq i \leq |w|. w_i = a \rightarrow w_{i+k} = b\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Konstruieren Sie einen NFA und einen UFA für $k = 2$ und $k = 3$. Vergleichen Sie Ihre beiden Lösung bezüglich der Größe der Automaten.
- (c) Geben Sie eine Übersetzung von UFAs zu DFAs an und beweisen Sie deren Korrektheit.