Prof. T. Nipkow
M. Eberl, J. Rädle, S. Wimmer
Technische Universität München
KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2019 – Übungsblatt 13

Klausurvorbereitung

Dieses Übungsblatt besteht aus einer Auswahl von Klausuraufgaben aus vorherigen Jahren und soll der Klausurvorbereitung dienen. Da in der Übung vermutlich nicht alle Aufgaben besprochen werden können, empfehlen wir den Rest zu Hause nachzuarbeiten.

AUFGABE 13.1. (*Endliche Automaten (1)*)
Sei $r = (\mathsf{a}|\mathsf{b})^*\mathsf{ab}(\mathsf{a}|\mathsf{b})^*$ ein regulärer Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) Konstruieren Sie einen NFA A mit $\mathsf{L}(A) = \mathsf{L}(r)$.

(b) Konstruieren Sie einen DFA B mit $\mathsf{L}(B) = \mathsf{L}(A)$.

(c) Konstruieren Sie den minimalen DFA C mit $\mathsf{L}(C) = \mathsf{L}(B)$.

(d) Konstruieren Sie den minimalen DFA D mit $\mathsf{L}(D) = \Sigma^* \setminus \mathsf{L}(C)$.

(e) Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck r' mit $\mathsf{L}(r') = \mathsf{L}(D)$. Verwenden Sie hierzu Ardens Lemma.

AUFGABE 13.2. (*Kontextfreie Sprachen (1)*)
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) Geben Sie für die Sprache $\mathsf{L} = \{(\mathsf{aba})^n\mathsf{b}^m(\mathsf{ba})^n\mathsf{b}\}$ kontextfreie Grammatik G and, so dass $\mathsf{L}(G) = \mathsf{L}$ gilt.

(b) Sei $G = (\{S\}, \Sigma, \{S \to \varepsilon \mid \mathsf{a}S\mathsf{c} \mid \mathsf{a}S\mathsf{b}S\mathsf{c}\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Zeigen Sie, dass für alle in G ableitbaren Wörter w die Eigenschaft $|w|_\mathsf{a} = |w|_\mathsf{c}$ gilt.

AUFGABE 13.3. (*Kontextfreie Sprachen (2)*)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Sprache $\mathsf{L} = \{\mathsf{a}^m\mathsf{b}^n \mid m \geq n \geq 0\}$ **deterministisch** kontextfrei ist, indem Sie einen deterministischen Kellerautomaten (DPDA) angeben, der L auf Endzustand akzeptiert. Ihr DPDA darf maximal vier Zustände besitzen.

(b) Gibt es einen DPDA, der L auf leeren Keller akzeptiert?

AUFGABE 13.4. (*Pumping Lemma*)
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathsf{L} = \{w\mathsf{c}^n w^R \mid w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht kontextfrei ist. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen.

AUFGABE 13.5. (*Entscheidbarkeit*)
Betrachten Sie die Menge $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \mathsf{M}.\mathit{enc}(\mathsf{M}) = w \wedge |\mathsf{L}_H(\mathsf{M})| \leq 42\}$.
(a) Beweisen Sie, dass die Menge nicht semi-entscheidbar ist, indem Sie $\overline{\mathsf{H}_0} \leq A$ zeigen.
(b) Geben Sie einen Semientscheidungsalgorithmus für $\overline{A}$ an.
Hinweis: Verwenden Sie **nicht** den Satz von Rice. Verwenden Sie für diese Aufgabe die folgende Definition des Halteproblems auf dem leeren Band $\mathsf{H}_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists \mathsf{M}.w = \mathit{enc}(\mathsf{M}) \wedge \mathsf{M}[\varepsilon]\downarrow\}$.

AUFGABE 13.6. (*Reduktionen*)

Mit SUBSET bezeichnen wir das Problem:
Gegeben: Ein ε-NFA N mit n Zuständen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und eine Zahl $m \leq n$.
Frage: Gibt es ein Wort w der Länge m, so dass N dieses Wort nicht akzeptiert?
...und in Mengenschreibweise:

$$\mathsf{SUBSET} := \{(\mathsf{N}, m) \mid \mathsf{N} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \text{ ist } \varepsilon\text{-NFA} \wedge m \leq |Q| \wedge \mathsf{L}(\mathsf{N}) \cap \Sigma^m \neq \Sigma^m\}$$

(a) Zeigen Sie, dass SUBSET NP-vollständig ist. Verwenden Sie hierbei eine geeignete Reduktion von SAT auf SUBSET.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf $(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ an. Geben Sie den konstruierten ε-NFA graphisch an.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller nichterfüllenden Belegungen für die Formel F, die genau m Variablen hat, als Wörter der Länge m.