

**Einführung in die theoretische Informatik**  
Sommersemester 2019 – Hausaufgabenblatt 10

**Handschriftliche Abgabe**

Formale Kriterien zu handschriftlichen Abgaben entnehmen Sie bitte der Website <https://www21.in.tum.de/teaching/theo/SS19>.

**AUFGABE 10.1.** (*Entscheidbarkeit*)

1,5 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptungen.

- (a)  $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(0) = 0\}$ .
- (b)  $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(w) = w\}$ .
- (c)  $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_0(0) = w\}$ .

**AUFGABE 10.2.** (*Quiz*)

1 Punkt

Sei  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Geben Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Objekte an. Falls kein solches Objekt existiert, begründen Sie dies.

- (a) Eine Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ , die nicht berechenbar aber total ist.
- (b) Eine Menge  $A \subseteq \Sigma^*$ , die nicht rekursiv aufzählbar ist und deren Komplement ebenfalls nicht rekursiv aufzählbar ist.

**AUFGABE 10.3.** (*PCP*)

0,5 Punkte

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Sei  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  ein Post'sches Korrespondenzproblem über einem beliebigen Alphabet  $\Sigma$  mit  $p_i = (x_i, y_i)$  und  $|x_i| = |y_i|$  für alle  $i \in [1, n]$ . Dann ist  $P$  entscheidbar.

**AUFGABE 10.4.** (*Rekursive Aufzählbarkeit*)

2 Punkte

Man kann Algorithmen für rekursiv aufzählbare Mengen oft auch als Suche nach einem Zeugen für die Aussage, dass sich ein gewisses Element  $x$  in der rekursiv aufzählbaren Menge befindet, betrachten. Diese Aufgabe soll diesen Zusammenhang genauer beleuchten.

Sei  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Wir bezeichnen eine binäre Relation  $R$  über Wörtern aus  $\Sigma^*$  als *entscheidbar*, wenn die Menge

$$\{x\#y \mid R(x, y) \wedge x, y \in \Sigma^*\}$$

entscheidbar ist.

Sei  $A \subseteq \Sigma^*$ . Zeigen Sie, dass  $A$  genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn es eine entscheidbare binäre Relation  $R$  mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$A = \{x \mid \exists y. R(x, y) \wedge x, y \in \Sigma^*\}$$