Prof. T. Nipkow
M. Eberl, J. Rädle, S. Wimmer Technische Universität München
HANDSCHRIFTLICHE ABGABE **8 Punkte**
Abgabefrist: Montag, 22.07.2019, 14 Uhr

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2019 – Bonusblatt 12

Handschriftliche Abgabe

Formale Kriterien zu handschriftlichen Abgaben entnehmen Sie bitte der Website `https://www21.in.tum.de/teaching/theo/SS19`.

Bonusblatt

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind *Bonusaufgaben*. Die Punkte zählen wie normale Hausaufgabenpunkte; es ist aber auch ohne Bearbeitung dieser Aufgaben möglich, die Maximalpunktzahl von 60 Punkten zu erreichen. Es ist nicht möglich, mehr als 60 Punkte insgesamt zu erreichen, da die Punktezahl bei 60 abgeschnitten wird.

AUFGABE 12.1. (*Wahr oder falsch?*) 1.5 Punkte

Im folgenden seien f und g Funktionen $\Sigma^* \to \Sigma^*$. Das Symbol $\circ$ steht für die Komposition zweier Funktionen, d.h. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
Einen Punkt gibt es grundsätzlich *nur* mit einer korrekten Begründung.

(a) Wenn f und g berechenbare Funktionen sind, ist auch $f \circ g$ berechenbar.

(b) Wenn g und $f \circ g$ berechenbare Funktionen sind, ist auch f berechenbar.

(c) Sei $A \in \mathsf{P}$ und sei M eine deterministische Turingmaschine mit $\mathsf{L}(M) = A$. Dann ist $\mathrm{time}_M(x)$ polynomiell beschränkt in $|x|$ (d.h. es gibt ein Polynom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{time}_M(x) \leq p(|x|)$ für alle $x \in \Sigma^*$).

AUFGABE 12.2. (*k-Färbbarkeit*) 1 Punkt

Für $k \in \mathbb{N}$ sei k-COL wie in der Vorlesung die Menge der Graphen, deren Knoten sich mit k verschiedenen Farben einfärben lassen, sodass keine zwei adjazenten Knoten die gleiche Farbe erhalten. Formal: Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$, gibt es eine Funktion $col : V \to \{1, \dots, k\}$ sodass für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $col(u) \neq col(v)$?
Zeigen Sie: Für jedes feste $k \geq 3$ gilt $3\text{-}\mathsf{COL} \leq_{\mathsf{p}} k\text{-}\mathsf{COL}$.

AUFGABE 12.3. (*Reguläre Ausdrücke mit Schnitt*) 1 + 0,5 + 1.5 + 1.5 + 1 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir die regulären Ausdrücke über einem Alphabet Σ ohne den “Kleene-Stern”-Operator, aber dafür mit einem Schnitt-Operator $\cap$. Die Menge dieser Ausdrücke nennen wir $\mathrm{RE}(\Sigma, |, \cdot, \cap)$.
Für diese Klasse von regulären Ausdrücken definieren wir die folgenden Probleme:

Wortproblem: Gegeben einen regulären Ausdruck $r \in \mathrm{RE}(\Sigma, |, \cdot, \cap)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$, ist $w \in \mathsf{L}(r)$?

Nicht-Leerheitsproblem: Gegeben einen regulären Ausdruck $r \in \mathrm{RE}(\Sigma, |, \cdot, \cap)$, ist $\mathsf{L}(r) \neq \emptyset$?

Die regulären Ausdrücke sind dabei auf die übliche Weise als Wörter kodiert (über dem Alphabet $\Sigma \cup \{(,), |, \cap, \varepsilon, \emptyset\}$).
Beachten Sie, dass beim Wortproblem sowohl der reguläre Ausdruck als auch das Wort die Eingabe bilden.

(a) Begründen Sie, dass das Wortproblem für $\mathrm{RE}(\Sigma, |, \cdot, \cap)$ in NP ist.

(b) Begründen Sie, dass das Nicht-Leerheitsproblem für $\mathrm{RE}(\Sigma, |, \cdot, \cap)$ in NP ist (sie dürfen hierbei Aufgabe (a) ohne Beweis verwenden).

(c) Zeigen Sie, dass das Nicht-Leerheitsproblem für $\mathrm{RE}(\Sigma, |, \cdot, \cap)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$ NP-schwer ist.

Tipp: Reduzieren Sie SAT auf das Nicht-Leerheitsproblem.

(d) Funktionieren ihre Konstruktionen aus den Aufgaben (a) bis (c) auch für $\mathrm{RE}(\Sigma, |, \cdot, \cap, ^*)$, also wenn man zusätzlich den Kleene-Stern erlaubt?

Hinweis: Ihre Begründungen können hier relativ kurz sein. Insb. wenn ein Argument nicht mehr funktioniert, reicht es, zu erklären, warum es zumindest nicht offensichtlich ist, ob das Argument noch funktioniert. Für ein korrektes Beispiel von Probleminstanzen, wo die Konstruktion nicht mehr funktioniert sowie für einen Beweis, dass sie nicht funktioniert, vergeben wir aber u.U. sogar zusätzliche Bonuspunkte.

(e) **Bonus-Knobelaufgabe (schwierig):** Zeigen Sie: Das Wortproblem für $\mathrm{RE}(\Sigma, |, \cdot, \cap, ^*)$ ist sogar in P.

Es reicht hierbei, ein entsprechendes Verfahren anzugeben, mit einer Begründung für die Korrektheit und polynomielle Laufzeit, aber ohne rigorosen Beweis.

Hinweis: Die Lösung ist recht kurz und benötigt kein Wissen, das über die Vorlesung hinausgeht. Es kann dennoch schwierig sein, darauf zu kommen. Sie sollten daher selbst abwägen, ob Sie die Zeit und Energie haben, sich an dieser Aufgabe zu versuchen.