

Einführung in die theoretische Informatik
Sommersemester 2019 – Hausaufgabenblatt Lösungsskizze 2

Handschriftliche Abgabe

Formale Kriterien zu handschriftlichen Abgaben entnehmen Sie bitte der Website <https://www21.in.tum.de/teaching/theo/SS19>.

AUFGABE 2.1. (*AutomataTutor*)

2 Punkte

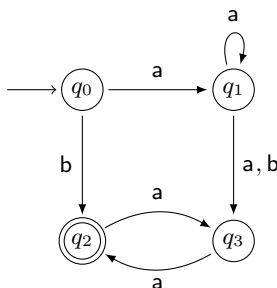
Lösen Sie im AutomataTutor die Aufgaben H2.1 (a–d). Beachten Sie, dass im Gegensatz zu den Übungsaufgaben für jede Teilaufgabe maximal fünf Versuche erlaubt sind.

Die Lösungen müssen Sie nicht in ihre handschriftliche Abgabe mit aufnehmen, es reicht aus sie im AutomataTutor einzureichen. Diese Aufgabe ist einzeln zu bearbeiten, die restlichen Aufgaben in Zweiergruppen.

AUFGABE 2.2. (*Potenzmengenkonstruktion*)

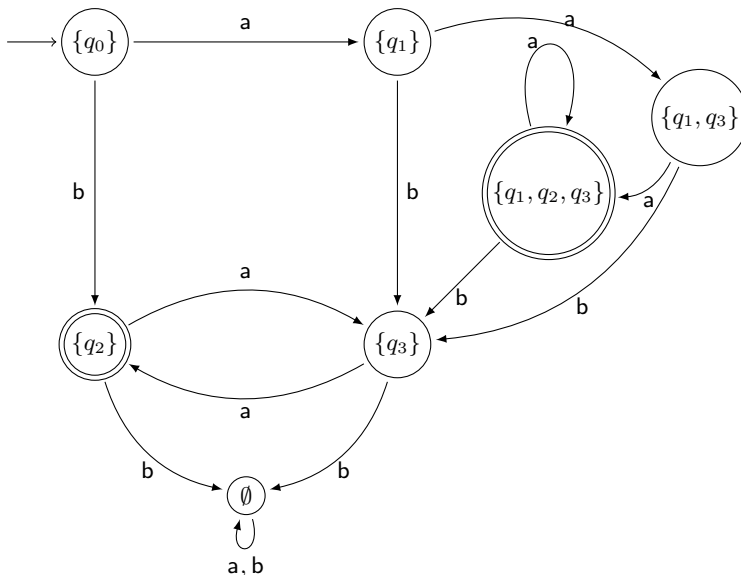
1 Punkt

Gegeben sei der NFA $N = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_2\})$:



Determinisieren Sie den NFA N mittels der Potenzmengenkonstruktion und geben Sie den resultierenden DFA **bildlich** an.

Lösungsskizze



AUFGABE 2.3. (*NFA aus Grammatik*)

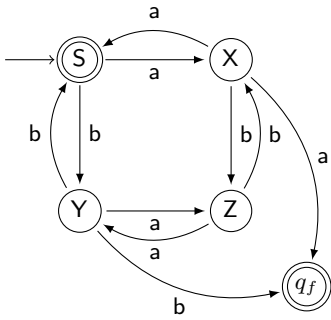
1 Punkt

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P : S \rightarrow \varepsilon \mid aX \mid bY \quad X \rightarrow a \mid aS \mid bZ \quad Y \rightarrow b \mid bS \mid aZ \quad Z \rightarrow aY \mid bX$$

Übersetzen Sie G (gemäß Satz 3.14) in einen NFA N , so dass $L(G) = L(N)$. Geben Sie N **bildlich** an.

Lösungsskizze



AUFGABE 2.4. (Operationen auf Sprachen)

2 Punkte

Sei Σ ein Alphabet und $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für korrekte Aussagen einen Beweis an oder widerlegen Sie falsche mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels. Sie können in dieser Aufgabe das Lemma $(C^*)^* = C^*$ für beliebige C ohne Beweis verwenden.

- (a) Falls $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$, dann $AC \subseteq BD$
- (b) Falls $AC \subseteq BD$, dann $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$
- (c) $A(B \setminus C) = AB \setminus AC$
- (d) $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$

Lösungsskizze

- (a) Die Aussage ist wahr.

$$\begin{aligned}
 AC &= \{uv \mid u \in A \wedge v \in C\} && \text{Def.} \\
 &\subseteq \{uv \mid u \in B \wedge v \in D\} && \text{Annahme} \\
 &= BD && \text{Def.}
 \end{aligned}$$

- (b) Gegenbeispiel: Sei $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \emptyset$, und $D = \{a\}$.

Dann ist $AC = \emptyset \subseteq BD$, aber $A = \{a\} \not\subseteq \{b\} = B$.

- (c) Gegenbeispiel: Sei $A = \{a, aa\}$, $B = \{\varepsilon\}$ und $C = \{a\}$.

$$A(B \setminus C) = \{a, aa\} \neq \{a\} = \{a, aa\} \setminus \{aa, aaa\} = AB \setminus AC$$

- (d) Wir zeigen die Aussage, indem wir die Teilmengenbeziehung für beide Richtungen zeigen. Beachten Sie, dass Konkatenation und Stern monoton sind, d.h. es gilt $A \subseteq C \implies AB \subseteq CB$, $B \subseteq C \implies AB \subseteq AC$ und $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$ für alle Sprachen A, B, C . Somit:

$$\begin{aligned}
 (A^*B^*)^* &\subseteq ((A \cup B)^*B^*)^* && \text{da } A \subseteq (A \cup B) \\
 &\subseteq ((A \cup B)^*(A \cup B)^*)^* && \text{da } B \subseteq (A \cup B) \\
 &= ((A \cup B)^*)^* && \text{da } C^* = C^*C^* \text{ für beliebige } C \\
 &= (A \cup B)^* && \text{da } C^* = (C^*)^* \text{ für beliebige } C
 \end{aligned}$$

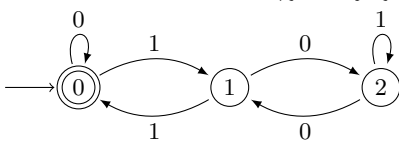
und umgekehrt:

$$\begin{aligned}
 (A \cup B)^* &\subseteq ((A \cup B) \cup (A^*B^*))^* && \text{da } (A \cup B) \subseteq (A \cup B) \cup C \text{ für beliebige } C \\
 &= (A^*B^*)^* && \text{da } A \cup B \subseteq A^*B^*
 \end{aligned}$$

AUFGABE 2.5. (DFA für Vielfache von 3)

1 Punkt

Gegeben sei der DFA $D = (\{0, 1, 2\}, \{0, 1\}, \delta, 0, \{0\})$ (Beispiel 3.5 aus der Vorlesung):



Zeigen sie dass der DFA genau die Wörter $w \in \{0, 1\}^*$ akzeptiert, für die gilt dass $\#w$ ein Vielfaches von 3 ist. Hierbei definieren wir $\#\varepsilon = 0$ und erlauben führende Nullen. Die Intuition dahinter ist, dass der Automat sich genau dann im Zustand n befindet, wenn $\#w \bmod 3 = n$ für das bisher gelesene Wort w gilt.

- (a) Zeigen Sie zuerst dass diese Invariante gilt. D.h. zeigen Sie unter der Annahme dass sich der Automat nach dem Einlesen eines Wortes w mit $\#w \bmod 3 = n$ im Zustand n befindet, die Aussage $\delta(n, b) = \#(wb) \bmod 3$ für ein beliebiges Zeichen $b \in \{0, 1\}$ gilt.
- (b) Zeigen Sie nun $\hat{\delta}(0, w) = \#w \bmod 3$.

Lösungsskizze

- (a) Für die binäre Repräsentation gilt $\#(wb) = 2\#w + b$. Damit können wir $\#(wb) \bmod 3$ wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} & \#(wb) \bmod 3 \\ &= (2\#w + b) \bmod 3 \\ &= (2(\#w \bmod 3) + b) \bmod 3 \\ &= (2n + b) \bmod 3 \end{aligned}$$

Damit genügt es zu zeigen dass $\delta(n, b) = (2n + b) \bmod 3$ gilt. Einsetzen aller Kombinationen von n und b ergibt folgende Tabelle:

n	b	$\delta(n, b)$	$(2n + b) \bmod 3$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	2	2
1	1	0	0
2	0	1	1
2	1	2	2

- (b) Wir zeigen $\hat{\delta}(0, w) = \#w \bmod 3$ mittels Induktion über die Länge von w .

IBasis:

- $|w| = 0$: Dann ist $w = \varepsilon$ und damit $\#w = 0$. Wegen $\delta(0, \varepsilon) = 0$ gilt die Behauptung.

ISchritt: Sei $w \in \{0, 1\}^*$ mit $|w| = n + 1$ beliebig aber fixiert.

- IAnnahme: Für alle w mit $|w| \leq n$ gilt $\hat{\delta}(0, w) = \#w \bmod 3$.
- IBehauptung: Für alle w mit $|w| = n + 1$ gilt $\hat{\delta}(0, w) = \#w \bmod 3$.
- IBeweis: Sei $w = w'b$ mit $b \in \{0, 1\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \hat{\delta}(0, wb) \\ &= \delta(\hat{\delta}(0, w), b) && \text{Vorlesung Folie 42} \\ &= \delta(\#w \bmod 3, b) && \text{IA} \\ &= (2(\#w \bmod 3) + b) \bmod 3 && \text{Teilaufgabe (a)} \\ &= (2\#w + b) \bmod 3 && \text{Arithmetik} \\ &= \#wb \bmod 3 && \text{Arithmetik} \end{aligned}$$